25.Exponentialgleichungen

25.1 Definition der Exponentialgleichung

Eine Exponentialgleichung ist eine Gleichung, bei der die Unbekannte (x) im Exponenten einer Potenz ❶ oder im Wurzelexponenten ❷vorkommt. Beispiele:

❶ $2^x = 8$

❷ $\sqrt[x]{9} = 3$

25.2 Lösungsverfahren Logarithmieren:

Wurzelgleichungen die aus zwei Summanden bestehen, kann man durch Logarithmieren lösen. **Lösungsschema:**

	Gegeben ist die Exponentialgleichung:	$3^x - 9 = 0$
Schritt 1:	Falls notwendig verteilt man die beiden Summanden auf beide Seiten:	$3^x = 9$
Schritt 2:	Man logarithmiert beide Seiten der Gleichung:	$log_{10}\, 3^x = log_{10}\, 9$
Schritt 3:	Man wendet das "Logarithmusgesetz für Potenzen auf alle Logarithmen an, die die Unbekannte x im Exponenten enthält, damit die Unbekannte aus dem Exponenten verschwindet	$x \cdot log_{10}\, 3 = log_{10}\, 9$
Schritt 4:	Man stellt die Gleichung nach x um, und erhält so die Lösung	$x = \frac{log_{10}\, 9}{log_{10}\, 3}$

© Josef Raddy

25.Exponentialgleichungen

25.3 Lösungsverfahren: Exponentenvergleich

Wenn eine Exponentialgleichung aus zwei Potenzen mit gleicher Basis besteht:

$$2^{x+1} = 2^{2x-3}$$

oder man die Basen der Exponentialgleichung gleich machen kann:

$$2^{x+1} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2^{x+1} = 2^2$$

dann kann man die Exponentialgleichung dadurch lösen,
indem man beide Exponenten gleichsetzt, denn es gilt der Satz::

$$a^x = a^n \quad \Rightarrow \quad x = n$$

Beispiel:

$$2^{x+1} = 2^{4x-3} \quad \Rightarrow \quad x+1 = 4x-3$$

25.4 Lösungsverfahren: Substitution

Exponentialgleichungen mit drei oder mehr Summanden sind nur in Sonderfällen lösbar.
Man löst sie mit dem Lösungsverfahren “Substitution”.

Damit die Substitution anwendbar ist, müssen in der Exponentialgleichung alle Basen
(die x im Exponenten haben) gleich sein , oder sie müssen gleich gemacht werden können.
Falls diese algebraische Gleichung lösbar ist, dann ist auch die Exponentialgleichung lösbar.
Beispiel:

Gegeben ist die Exponentialgleichung bei der alle Basen gleich sind (hier sind alle gleich 2):

$$2^{2x} - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Dann kann man die Potenzen mit Hilfe der Potenzgesetze gleich machen:

$$\left(2^x\right)^2 - 4 \cdot 2^x + 4 = 0$$

Jetzt werden die Potenzen 2^x durch u substituiert, und die algebraische Gleichung gelöst:

$$u^2 - 4u + 4 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (u-2)^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad u = 2$$

Jetzt darf man die Rücksubstitution nicht vergessen:

$$u = 2^x \quad \Rightarrow \quad 2 = 2^x$$

Wir erhalten eine Exponentialgleichung mit zwei Summanden, die man durch
Logarithmieren oder durch Exponentenvergleich lösen kann.

$$2 = 2^x \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

© Josef Raddy